

Texture analysis using local fractal dimension of complex networks

Diogo Nunes Gonçalves, Lucas Abreu da Silva, Reinaldo Felipe Soares Araujo,
Bruno Brandoli Machado, Wesley Nunes Gonçalves
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - CPPP
Ponta Porã, MS, 79907-414

dnunesgoncalves@gmail.com, {lucas10df, felipeix}@hotmail.com, {bruno.brandoli, wesley.goncalves}@ufms.br

Resumo—The texture analysis is one of the most important research areas in computer vision. Currently, complex network has emerged as an approach for representing images due to its flexibility for modeling several problems. Generally, the application of the complex network theory involves two steps: representing the structure of interest into a network and extracting measurements from it. Due to the large number of measurements, decide the appropriate measurements for a particular problem is a challenge. This paper proposes the fractal dimension of complex networks as a measurement for extracting relevant features from texture images. For this, an image is modeled as a network where each pixel is mapped into a vertex. By varying the radius of connection between vertices, the proposed method estimates the local fractal dimension for each vertex to form a histogram of dimensions. Results on two image databases show the effectiveness of the proposed method against traditional texture methods.

I. INTRODUÇÃO

A análise de textura é uma das mais importantes áreas de pesquisa em visão computacional. Ela possui diversas aplicações em potencial, como inspeção industrial [1], análise de imagens médicas [2] e análise de imagens de satélite [3]. Ainda não existe uma definição formal de textura amplamente aceita na literatura, que seja clara e não ambígua. Julesz [4], [5] foi um dos primeiros pesquisadores a definir o termo textura, nos anos 60 e 70. Sua definição era que duas texturas possuem padrões visuais parecidos se elas possuem estatísticas, tanto de primeira quanto de segunda ordem, similares. Outra definição para o termo de textura é inspirada na resposta das células do córtex visual [6]. Apesar das diferentes definições encontradas na literatura, a textura pode ser definida como um padrão que se repete sobre uma superfície em sua forma exata ou pequenas variações.

Recentemente, as redes complexas têm sido extensivamente estudadas em áreas interdisciplinares incluindo matemática, física, ciência da computação, economia, biologia, etc. A rede complexa tem se tornado uma ferramenta versátil devido a sua alta flexibilidade em modelar problemas genéricos. Em imagens, as redes complexas têm apresentado resultados promissores [7], [8], [9]. Em geral, a aplicação das redes complexas em um problema envolve a representação da estrutura de interesse como uma rede, seguida por uma análise da topologia em termos de um conjunto de medidas. As medidas extraídas são então utilizadas para classificar a rede em diferentes categorias. Portanto, o problema-chave em redes complexas é definir o conjunto de medidas adequado dentre as medidas propostas na literatura [7]. Apesar da importância,

não existe um procedimento matemático para identificar as melhores medidas a serem extraídas para um determinado problema [7].

Neste artigo, é proposta a utilização da dimensão fractal como medida para redes complexas aplicada na análise de texturas. No método proposto, uma imagem é representada por meio de uma rede complexa e a dimensão fractal é estimada para cada vértice. Conforme observado, a dimensão fractal caracteriza a complexidade de cada vértice na topologia da rede, a qual está diretamente relacionada com a textura na imagem. Experimentos em uma base de texturas amplamente utilizada na literatura demonstraram a eficácia do método proposto. Além disso, o método proposto foi aplicado no reconhecimento de doações em folhas de soja, obtendo resultados superiores aos principais métodos da literatura.

Este artigo está descrito em 6 seções. A Seção II apresenta uma revisão de literatura sobre os principais métodos de texturas em imagens. O referencial teórico de redes complexas e dimensão fractal é descrito na Seção III. A Seção IV detalha o método proposto que estima a dimensão fractal de redes complexas. Os resultados experimentais são apresentados na Seção V enquanto que a Seção VI apresenta as conclusões e os trabalhos futuros.

II. REVISÃO DE LITERATURA

A literatura apresenta diversos métodos para análise de texturas. Estes métodos se dividem em quatro categorias: (i) estrutural; (ii) estatísticos; (iii) espectral; (iv) baseado em modelos.

Métodos estruturais: a ideia desses métodos é considerar a textura como arranjos hierárquicos de elementos bem definidos, conseguindo uma descrição simbólica da imagem [10], [11]. Geralmente as operações morfológicas (e.g. abertura e fechamento) são utilizadas nas imagens para caracterizar a evolução dos elementos de textura, como apresentado em [11], [12]. Detectores e descritores de pontos-chaves da imagem têm sido propostos a fim de encontrar e descrever os elementos de textura [13]. O método proposto por Lazebnik et al [14] obteve bons resultados utilizando um conjunto de regiões obtidas pelos detectores Harris e Laplacian como elementos de textura. Então, os descritores RIFT e spin foram utilizados para caracterizar esses elementos.

Métodos estatísticos: os métodos dessa categoria representam a textura obtendo distribuições estatísticas em relação aos

níveis de cinza da imagem. Analogamente, essa ideia também pode ser utilizada para imagens coloridas. Os momentos de primeira e segunda ordem, calculados pelo histograma da imagem [15], foram utilizados nos primeiros trabalhos propostos. Porém, essa abordagem é limitada para texturas irregulares ou estruturais. Então, métodos mais eficientes foram propostos, como a matriz de co-ocorrência [16] e o padrão local binário [17].

Métodos espectrais: esses métodos usam informações espectrais da imagem para representar a textura. A ideia principal é, através de uma estimativa da frequência espacial da intensidade dos pixels, correlacionar as texturas mais rugosas às baixas frequências e as texturas mais finas às altas frequências. Os métodos desta categoria têm como foco o desenvolvimento de bancos de filtros, por exemplo, os filtros de Gabor [18], e também na decomposição em sub-bandas (e.g wavelets [19]) para descrever as texturas com eficiência.

Métodos baseados em modelos: esses métodos procuram representar a textura através da construção de um modelo e a obtenção dos seus parâmetros. Kashyap and Khotanzad [20] propuseram os modelos autoregressivos invariantes à rotação e Cohen et al [21] introduziram os campos aleatórios de Markov para análise de textura. Os métodos que têm apresentado resultados interessantes na análise de textura são os baseados em geometria fractal. Como exemplo, os descritores fractais [22], o espectro multifractal [23] e dimensão fractal local [24].

III. REFERENCIAL TEÓRICO

A. Redes Complexas

Atualmente, as redes complexas têm sido amplamente estudadas por causa da sua natureza multidisciplinar, podendo ser utilizada na área de sociologia [25], biologia [26], visão computacional [27] e física [7]. Existem três grandes descobertas que contribuíram com a pesquisa de redes complexas: investigação de redes pequeno-mundo [28], redes livre de escalas [29] e identificação de estruturas comunitárias na rede [30]. Conceitualmente, pode-se dizer que a rede complexa abrange tanto a teoria de grafos quanto mecânica estatística [7]. A teoria do grafo está bem estabelecida na área de ciência da computação e matemática, enquanto a teoria de rede complexa abrange também a área de física e sociologia. Basicamente a pesquisa em redes complexas envolve dois passos: representar o problema como uma rede complexa e depois analisar as características topológicas obtidas através de um conjunto de medidas. Com essa análise de características é possível identificar diferentes categorias de estruturas.

A rede complexa é representada através de um grafo. Um grafo com peso e não direcionado $R = (V, E)$ é definido por um conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ e um conjunto de arestas $E = \{e_{v_i, v_j}\}$ em que $e_{v_i, v_j} \in \mathbb{R}$ representa o peso da aresta entre o nós v_i e v_j . No grafo não direcionado o peso da aresta e_{v_i, v_j} é numericamente igual a e_{v_j, v_i} .

Dado um vértice $v_i \in V$, suas medidas mais tradicionais são o grau e o grau ponderado. O grau do vértice é definido como a quantidade de arestas:

$$k(v_i) = \sum_{v_j \in V} \begin{cases} 1, & \text{se } e_{v_i, v_j} \in E \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

O grau ponderado do vértice é dado pela soma dos pesos das arestas que o vértice contém:

$$w(v_i) = \sum_{v_j \in V} \begin{cases} e_{v_i, v_j}, & \text{se } e_{v_i, v_j} \in E \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2)$$

B. Dimensão Fractal

O termo fractal foi introduzido por Mandelbrot [31] como sendo um conjunto de pontos $X \in \mathbb{R}^n$ no qual sua dimensão não possa ser descrita pela sua dimensão topológica. Uma das características de um objeto fractal é ser auto-similar, portanto, um conjunto X pode ser descrito por meio da união de $N_r(X)$ subconjuntos distintos (não sobrepostos), em que cada subconjunto é similar ao conjunto original X em uma escala reduzida por um fator r . Assim, a dimensão fractal D de um conjunto X pode ser descrita por:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r(X)}{\log r} \quad (3)$$

Por meio da definição acima, diversos métodos foram propostos para estimar a dimensão fractal de objetos que apresentam algum grau de similaridade em intervalos específicos, embora tais objetos não sejam matematicamente definidos como fractais.

IV. MÉTODO PROPOSTO

O método proposto transforma uma imagem em uma rede complexa. Para isso, cada pixel é mapeado como sendo um vértice. Após a construção da rede, calcula-se a dimensão fractal de cada vértice. Por fim, um histograma das dimensões é obtido para caracterizar a imagem. Basicamente, o método proposto pode ser descrito em três etapas: i) transformar a imagem em uma rede complexa; ii) calcular a dimensão fractal de cada vértice; iii) calcular o histograma das dimensões. Cada uma das etapas é detalhada nas seções abaixo.

A. Modelagem de Imagem em Rede Complexa

Considere uma imagem I e uma rede complexa $R = (V, E)$. Para transformar uma imagem em uma rede, cada pixel $p_i = (x_i, y_i) \in I$ é mapeado em um vértice $v_i \in V$. Dois vértices v_i e v_j estão conectados se a distância Euclidiana entre os seus pixels correspondentes p_i e p_j for menor que um raio r ,

$$e_{v_i, v_j} = \begin{cases} |I(p_i) - I(p_j)|, & \text{se } d(p_i, p_j) \leq r \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4)$$

em que $d(p_i, p_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$. Considera-se o peso da aresta e_{v_i, v_j} como sendo o módulo da diferença dos níveis de cinza dos pixels p_i e p_j . Dessa forma, o peso da aresta de pixels com nível de cinza similares será baixo, diferentemente de pixels com nível de cinza com alto contraste.

Considerando as arestas descritas anteriormente, cada vértice da rede possui o mesmo grau, exceto aqueles na borda. Para transformar a rede regular em um rede complexa, são mantidas na rede somente as arestas cujo peso é menor ou

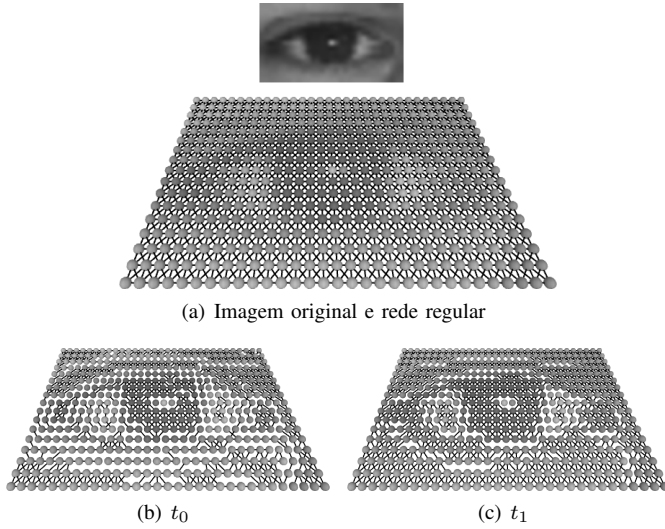


Figura 1. Exemplo de uma imagem, rede regular e duas redes transformadas com dois limiares $t_0 < t_1$.

igual a um determinado limiar t . Diferentes valores t transformam a rede regular em redes complexas R_t com diferentes características. Por exemplo, uma rede transformada com t pequeno evidencia conjuntos de pixels com níveis de cinza muito similares. Por outro lado, conforme t é incrementado, as características gerais da imagem são evidenciadas. A Figura 1 ilustra uma rede regular e duas redes complexas transformadas com $t_0 < t_1$, em que é possível perceber a influência do limiar.

B. Dimensão Fractal de Redes Complexas

Após a construção da rede complexa com raio r e limiar t , cada vértice possui um grau ponderado w_t^r dado pela soma do peso das suas arestas conforme Equação 5. É possível notar que $w_t^r(v_i)$ é maior se o pixel estiver em uma região com alto contraste, ou seja, a diferença do nível de cinza de seus vizinhos for grande.

$$w_t^r(v_i) = \sum_{v_j \in V} \begin{cases} e_{v_i, v_j}, & \text{se } e_{v_i, v_j} \in E \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

Neste trabalho, a dimensão fractal tem como objetivo caracterizar a complexidade de cada vértice na topologia da rede por meio do seu grau ponderado. Para calcular a dimensão fractal de um vértice v_i , calcula-se o grau ponderado $w_t^r(v_i)$ para diferentes valores de r conforme Equação 6.

$$D^t(v_i) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log w_t^r(v_i)}{\log r} \quad (6)$$

Ao calcular o grau ponderado para diferentes valores de r , é possível obter informações espaciais das conexões que o vértice faz com os seus vizinhos em diferentes escalas. A dimensão fractal, portanto, busca estimar ou atribuir um valor (sua dimensão) para a complexidade desse vértice na topologia.

Embora a Equação 6 seja exata, o seu cálculo analítico torna-se inviável. Portanto, para calcular a dimensão fractal estima-se o coeficiente angular da reta formada entre $\log r \times$

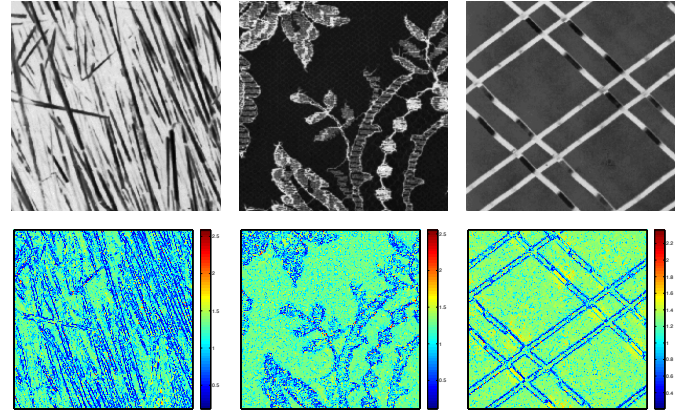


Figura 3. Exemplos de três imagens originais da base *Brodatz* e suas respectivas dimensões fractais. Como pode ser observado, as dimensões fractais de cada vértice/pixel estão correlacionadas com a textura na imagem.

$\log w_t^r(v_i)$. Para exemplificar o cálculo da dimensão fractal de cada vértice, considere a Figura 2 em que cada círculo representa um vértice e seu respectivo nível de cinza no centro. As arestas e seus pesos para raios $r = \sqrt{1}, \sqrt{2}$ e $\sqrt{4}$ são apresentados nas Figuras 2(a), 2(b) e 2(c), respectivamente. Para os diferentes valores de r , o grau ponderado para o vértice central é 60, 153 e 325. Finalmente, a dimensão fractal é obtida por meio do coeficiente angular da reta formada pelo logaritmo dos graus ponderados, conforme ilustrado na Figura 2(d).

A dimensão fractal de cada vértice está diretamente relacionada com a textura na imagem. A Figura 3 apresenta exemplos da dimensão fractal de cada vértice/pixel para imagens de textura para rede complexa obtida com limiar $t = 50$. Conforme pode ser observado, a dimensão fractal representa a complexidade espacial dos pixels, sendo portanto, uma medida que caracteriza a textura na imagem.

C. Vetor de Características

Nessa etapa, é construído o vetor de características. Dada uma imagem I transformada em uma rede complexa R^t com o limiar t , cada vértice v_i terá sua dimensão fractal correspondente. Para esta rede complexa, calcula-se o histograma h^t das dimensões fractais de todos os vértices pertencentes a rede complexa. Para o cálculo do histograma, a faixa de possíveis valores de dimensão é dividida em n intervalos distintos.

O histograma h^t é calculado a partir de uma rede construída com limiar t . Para incluir mais informações sobre as características da rede complexa, varia-se o limiar t , sendo possível calcular o histograma para diferentes limiares. O vetor de características final é formado pela concatenação dos diferentes h^t variando o limiar t , ou seja,

$$\varphi = [h^{t_0}, h^{t_1}, \dots, h^{t_n}] \quad (7)$$

V. EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Nesta seção são descritas as bases de imagens, os experimentos realizados e os resultados obtidos. Para a validação do método proposto, experimentos foram realizados em duas bases de imagens, uma bem conhecida na literatura e outra para avaliar o método em uma aplicação real.

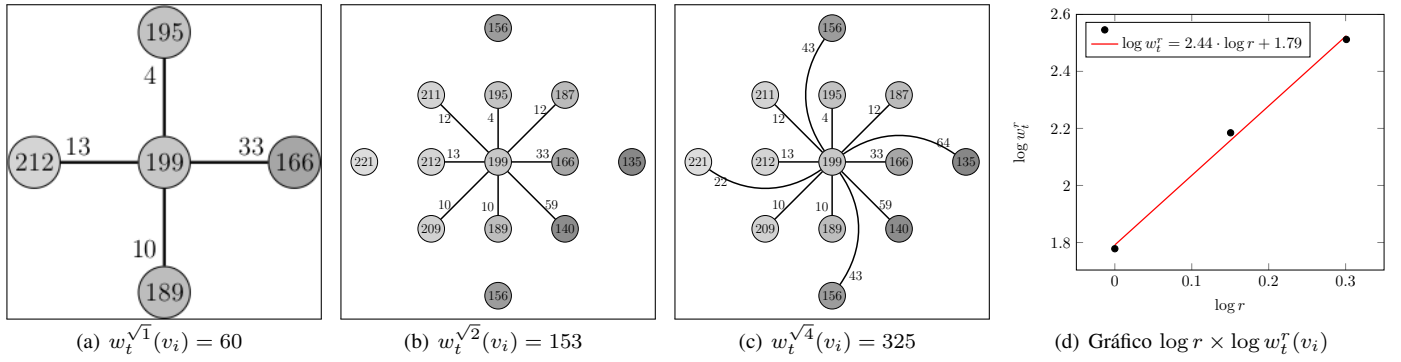


Figura 2. Exemplo do cálculo da dimensão fractal para um vértice. O grau ponderado para diferentes valores de raios são calculados, como (a) $r = \sqrt{1}$, (b) $r = \sqrt{2}$ e (c) $r = \sqrt{4}$. Dado o gráfico $\log r \times \log w_t^r$, a dimensão fractal é dada pelo coeficiente angular da reta estimada.

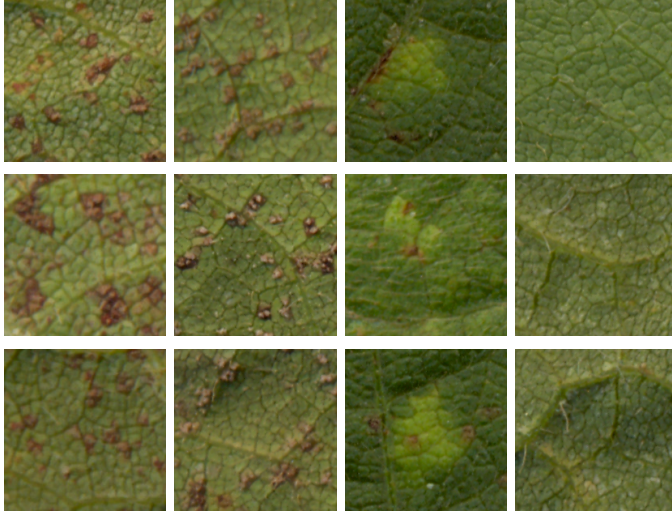


Figura 4. Exemplos das quatro classes presentes na base de Doenças em folhas de soja. Cada coluna representa uma classe: duas variações de ferrugem, mildio e folha sadia.

Brodatz: essa base de imagens foi formada através do álbum de Brodatz e é uma das mais utilizadas na validação de métodos de análise de textura. A base possui 111 classes, cada uma contendo 10 exemplos de imagens com 200×200 pixels.

Doenças em Folhas de Soja: este banco de imagens foi formado com o intuito de validar métodos que detectem doenças em folhas de soja. O banco é formado por 4 classes: folhas saudias, mildio e duas variações da doença ferrugem. As duas variações da ferrugem são causadas pelo fungo *Phakopsora pachyrhizie* enquanto que o mildio é causado pelo fungo *Peronospora manshurica*. Cada classe contém 300 exemplos de imagens com 200×200 pixels. A Figura 4 apresenta exemplos de amostras deste banco de imagens.

Nos experimentos, utilizou-se o classificador K-vizinhos mais próximos (KNN) usando amostragem de validação cruzada em 10 pastas. Esse classificador é considerado um dos mais simples na literatura, com isso evidencia-se a importância das características no processo de classificação.

A. Análise de Parâmetros

Nesta seção, os dois principais parâmetros do método proposto foram avaliados. Os dois parâmetros são: o número de intervalos n que o histograma é dividido e o conjunto de limiares $T = \{5, 10, 15, \dots, t_{max}\}$. No conjunto de limiares optou-se por avaliar o limiar máximo, pois os demais conjuntos apresentaram resultados similares.

O gráfico da Figura 5(a) apresenta a porcentagem de classificação correta (PCC) para diferentes valores de n para as duas bases de imagens. A melhor divisão de intervalos do histograma foi $n = 30$ para a base *Brodatz* e $n = 50$ para a base *Doenças em Soja*. Quanto maior o valor de n , maior o número de intervalos em que as dimensões fractais serão divididas. Como as imagens da base *Brodatz* possuem maior contraste, foi necessário discretizar as dimensões em menos intervalos. Por outro lado, as imagens da base *Doenças em soja* são mais parecidas entre si, tornando as dimensões fractais mais próximas. Portanto, para esta base foi necessário mais intervalos para as dimensões fractais.

O limiar máximo foi avaliado por meio do gráfico da Figura 5(b). O gráfico apresenta dados interessantes, como a baixa porcentagem de acerto quando o limiar máximo t_{max} é pequeno. Isso ocorre porque as redes complexas formadas com limiares pequenos são pouco conectadas, tendo assim poucas características topológicas para diferenciar as classes. Por outro lado, um limiar máximo muito grande acrescenta redes complexas completamente conectadas, tendo pouca diferença entre classes. Sendo assim, o limiar máximo com o melhor resultado na base *Brodatz* foi $t_{max} = 50$, enquanto que na base *Doenças em Soja* foi $t_{max} = 40$.

B. Comparação com Métodos da Literatura

Nas Tabelas I e II apresenta-se a comparação entre o método proposto e métodos tradicionais da literatura, inclusive de métodos baseados em dimensão fractal. Nestas tabelas, a comparação é realizada usando a medida-F, área sob a curva ROC (AUC) e a porcentagem de classificação correta (PCC), todas as medidas acompanhadas com o desvio padrão.

O método proposto forneceu a maior PCC, AUC e medida-F comparado com os demais métodos na base de imagens *Brodatz*, que corresponde a Tabela I. Nesta base o método proposto alcançou $95.67(\pm 1.53)$ enquanto que a Dimensão

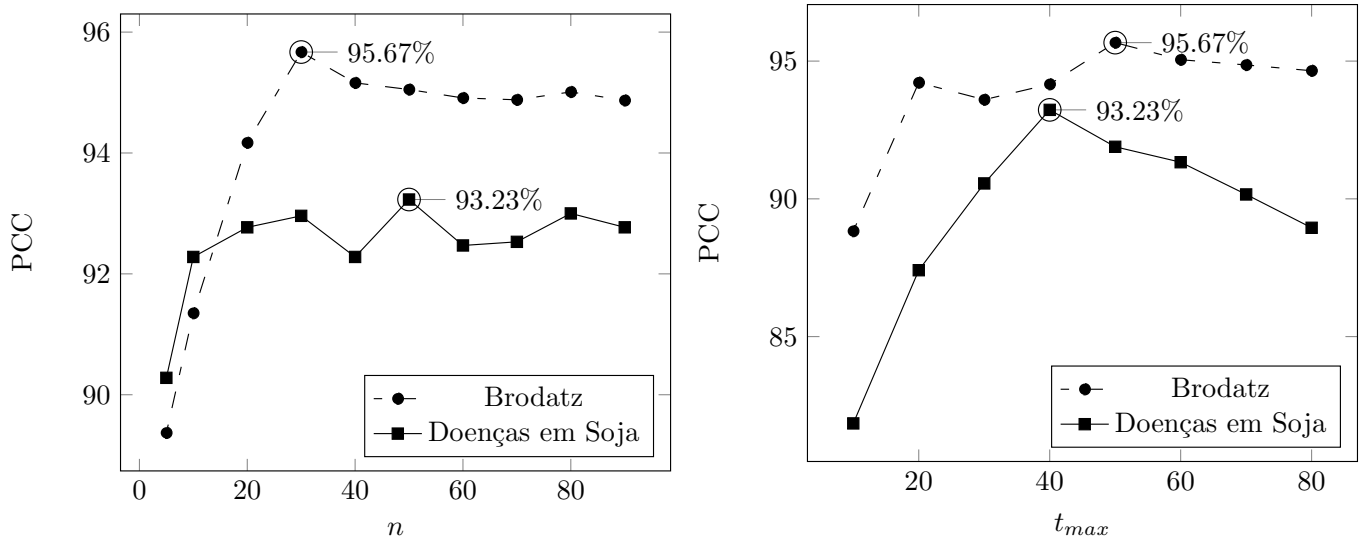


Figura 5. Resultados experimentais para os dois parâmetros do método proposto: (a) número de intervalos do histograma n e (b) limiar máximo t_{max} .

Tabela I. RESULTADOS EXPERIMENTAIS PARA MÉTODOS DE TEXTURA APLICADOS NA BASE DE IMAGENS BRODATZ.

Método	Medida-F	AUC	PCC (%)
Fourier [32]	0.67(± 0.04)	0.85(± 0.02)	70.72(± 3.85)
M. de co-ocorrência [33]	0.84(± 0.03)	0.93(± 0.01)	86.49(± 2.85)
Filtros de Gabor [34]	0.86(± 0.02)	0.94(± 0.01)	89.01(± 1.52)
LBPV [35]	0.92(± 0.02)	0.97(± 0.01)	93.51(± 1.89)
Multi-fractal spectrum [36]	0.70(± 0.04)	0.87(± 0.02)	74.59(± 3.41)
Descritores fractais [37]	0.51(± 0.05)	0.78(± 0.02)	57.14(± 4.50)
Dimensão fractal local [24]	0.93(± 0.03)	0.97(± 0.01)	94.05(± 2.69)
Método proposto	0.94(± 0.02)	0.98(± 0.01)	95.67(± 1.53)

Tabela II. RESULTADOS EXPERIMENTAIS PARA MÉTODOS DE TEXTURA APLICADOS NA BASE DE IMAGENS DE DETECÇÃO DE DOENÇAS EM FOLHAS DE SOJA.

Método	Medida-F	AUC	PCC (%)
Fourier [32]	0.83(± 0.03)	0.89(± 0.02)	82.73(± 2.99)
M. de co-ocorrência [33]	0.87(± 0.03)	0.91(± 0.02)	87.11(± 3.05)
Filtros de Gabor [34]	0.91(± 0.02)	0.94(± 0.02)	90.70(± 2.41)
LBPV [35]	0.90(± 0.02)	0.94(± 0.01)	90.32(± 2.24)
Multi-fractal spectrum [36]	0.68(± 0.04)	0.79(± 0.03)	67.57(± 3.77)
Descritores fractais [37]	0.62(± 0.04)	0.74(± 0.02)	61.59(± 3.59)
Dimensão fractal local [24]	0.82(± 0.04)	0.88(± 0.02)	82.13(± 3.55)
Método proposto	0.93(± 0.02)	0.96(± 0.01)	93.23(± 1.86)

Fractal Local, segundo melhor método, obteve 94.05(± 2.69). As demais medidas seguiram resultados similares a PCC.

Os métodos também foram aplicados no reconhecimento de *Doenças em soja* e os resultados são reportados na Tabela II. Um método para reconhecer tais doenças é um desafio tecnológico devido as semelhanças entre as folhas. Apesar do desafio, o método proposto alcançou uma porcentagem de 93.23(± 1.86). O segundo e terceiro melhores métodos foram os filtros de Gabor e os padrões locais binários com porcentagens de 90.70(± 2.41) e 90.32(± 2.24), respectivamente.

VI. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi proposto um método para análise de textura através da aplicação de Dimensão Fractal como medida de Redes Complexas. Para isso, transforma-se uma imagem em uma rede complexa, em que cada pixel é representado por um vértice na rede e estes são conectados por meio de um limiar

e um raio. Logo após, calcula-se a dimensão fractal de cada vértice da rede através do seu grau ponderado, sendo assim possível classificar a imagem com o histograma das dimensões. Usando uma base tradicional, o método obteve resultados superiores aos métodos tradicionais da literatura, incluindo métodos que utilizam fractal como característica. Para uma aplicação desafiadora e real de classificação de doenças em folhas de soja, o método também apresentou bons resultados superando os demais métodos.

Os resultados obtidos através de Dimensão Fractal em Redes complexas demonstraram seu grande potencial para a caracterização de texturas em bases tradicionais e em uma aplicação real. Os trabalhos futuros incluem a aplicação em outras bases de imagens, extensão do método proposto para texturas dinâmicas e utilização de outras formas de codificar as dimensões fractais além do histograma.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, ao programa PET - Fronteira, Fundação de Apoio ao Desenvolvimento do Ensino, Ciência e Tecnologia do Estado de Mato Grosso do Sul - Fundect e o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo apoio financeiro e o espaço cedido para a realização das pesquisas e experimentos.

REFERÊNCIAS

- [1] X. Xie and M. Mirmehdi, "Texems: Texture exemplars for defect detection on random textured surfaces," *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, vol. 29, no. 8, pp. 1454–1464, 2007.
- [2] T. Glatard, J. Montagnat, and I. E. Magnin, "Texture based medical image indexing and retrieval: Application to cardiac imaging," in *Proceedings of the 6th ACM SIGMM International Workshop on Multimedia Information Retrieval*, ser. MIR '04. New York, NY, USA: ACM, 2004, pp. 135–142. [Online]. Available: <http://doi.acm.org/10.1145/1026711.1026734>
- [3] Y. Zhao, L. Zhang, and P. Li, "Texture feature fusion for high resolution satellite image classification," in *Computer Graphics, Imaging and Vision: New Trends, 2005. International Conference on*, 2005, pp. 19–23.

- [4] B. Julesz, "Visual pattern discrimination," *Information Theory, IRE Transactions on*, vol. 8, no. 2, pp. 84–92, 1962.
- [5] B. Julesz, E. N. Gilbert, L. A. Shepp, and H. L. Frish, "Inability of humans to discriminate between visual textures that agree in second-order statistics-revisited," *Perception*, vol. 2, no. 4, pp. 391–405, 1973.
- [6] R. L. D. Valois, D. G. Albrecht, and L. G. Thorell, "Spatial frequency selectivity of cells in macaque visual cortex," *Vision Research*, vol. 22, no. 5, pp. 545 – 559, 1982. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0042698982901134>
- [7] L. daF. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso, and P. R. V. Boas, "Characterization of complex networks: A survey of measurements," *Advances in Physics*, vol. 56, no. 1, pp. 167–242, January 2005. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0505185>
- [8] W. N. Gonçalves, B. B. Machado, and O. M. Bruno, "A complex network approach for dynamic texture recognition," *Neurocomputing*, vol. 153, no. 0, pp. 211 – 220, 2015.
- [9] W. N. Gonçalves, de Jonathan de Andrade Silva, and O. M. Bruno, "A rotation invariant face recognition method based on complex network," in *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*, ser. Lecture Notes in Computer Science, 2010, vol. 6419, pp. 426–433.
- [10] Y. Chen and E. R. Dougherty, "Gray-scale morphological granulometric texture classification," *Optical Engineering*, vol. 33, pp. 2713–2722, Aug. 1994.
- [11] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Orlando, FL, USA: Academic Press, Inc., 1983.
- [12] A. Asano, M. Miyagawa, and M. Fujio, "Texture modelling by optimal gray scale structuring elements using morphological pattern spectrum," in *Pattern Recognition, 2000. Proceedings. 15th International Conference on*, vol. 3, 2000, pp. 475–478 vol.3.
- [13] J. Zhang, M. Marszałek, S. Lazebnik, and C. Schmid, "Local features and kernels for classification of texture and object categories: A comprehensive study," in *Computer Vision and Pattern Recognition Workshop, 2006. CVPRW '06. Conference on*, 2006, pp. 13–13.
- [14] S. Lazebnik, C. Schmid, and J. Ponce, "A sparse texture representation using local affine regions," *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, vol. 27, no. 8, pp. 1265–1278, 2005.
- [15] F. Tomita and S. Tsuji, *Computer Analysis of Visual Textures*. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [16] R. Haralick, "Statistical and structural approaches to texture," *Proceedings of the IEEE*, vol. 67, no. 5, pp. 786–804, May 1979.
- [17] T. Ojala, M. Pietikainen, and T. Maenpää, "Multiresolution gray-scale and rotation invariant texture classification with local binary patterns," *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, vol. 24, no. 7, pp. 971–987, 2002.
- [18] R. Sandler and M. Lindenbaum, "Optimizing gabor filter design for texture edge detection and classification," *International Journal of Computer Vision*, vol. 84, pp. 308–324, 2009.
- [19] C.-M. Pun and M.-C. Lee, "Log-polar wavelet energy signatures for rotation and scale invariant texture classification," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 25, pp. 590–603, 2003.
- [20] R. L. Kashyap and A. Khotanzad, "A model-based method for rotation invariant texture classification," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 8, no. 4, pp. 472–481, Jun. 1986. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/TPAMI.1986.4767811>
- [21] F. S. Cohen, Z. Fan, and M. A. Patel, "Classification of rotated and scaled textured images using gaussian markov random field models," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 13, no. 2, pp. 192–202, Feb. 1991. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1109/34.67648>
- [22] A. R. Backes and O. M. Bruno, "Plant leaf identification using multi-scale fractal dimension," in *ICIAP*, 2009, pp. 143–150.
- [23] Y. Xu, H. Ji, and C. Fermüller, "Viewpoint invariant texture description using fractal analysis," *Int. J. Comput. Vision*, vol. 83, no. 1, pp. 85–100, Jun. 2009. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s11263-009-0220-6>
- [24] M. Varma and R. Garg, "Locally invariant fractal features for statistical texture classification," in *ICCV*, 2007, pp. 1–8.
- [25] M. E. J. Newman and J. Park, "Why social networks are different from other types of networks," *Phys. Rev. E*, vol. 68, p. 036122, 2003.
- [26] A.-L. Barabasi and Z. N. Oltvai, "Network biology: Understanding the cell's functional organization," *Nat Rev Genet*, vol. 5, no. 2, pp. 101–113, 2004.
- [27] W. N. Gonçalves, A. S. Martinez, and O. M. Bruno, "Complex network classification using partially self-avoiding deterministic walks," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 22, no. 3, p. 033139, 2012.
- [28] D. J. Watts and S. H. Strogatz, "Collective dynamics of small-world networks," *Nature*, vol. 393, no. 6684, pp. 409–10, 1998.
- [29] A.-L. Barabasi and R. Albert, "Emergence of scaling in random networks," *Science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [30] M. Girvan and M. E. J. Newman, "Community structure in social and biological networks," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 99, no. 12, pp. 7821–7826, 2002.
- [31] B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form, chance, and dimension*. New York: W. H. Freedman and Co., 1977.
- [32] R. Azencott, J.-P. Wang, and L. Younes, "Texture classification using windowed fourier filters," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 19, pp. 148–153, February 1997.
- [33] C. Palm, "Color texture classification by integrative co-occurrence matrices," *Pattern Recognition*, vol. 37, no. 5, pp. 965–976, 2004.
- [34] M. Idrissa and M. Acheroy, "Texture classification using gabor filters," *Pattern Recognition Letters*, vol. 23, no. 9, pp. 1095 – 1102, 2002.
- [35] Z. Guo, L. Zhang, and D. Zhang, "Rotation invariant texture classification using {LBP} variance (lbpv) with global matching," *Pattern Recognition*, vol. 43, no. 3, pp. 706 – 719, 2010.
- [36] Y. Xu, H. Ji, and C. Fermüller, "Viewpoint invariant texture description using fractal analysis," *International Journal of Computer Vision*, vol. 83, no. 1, pp. 85–100, 2009.
- [37] A. R. Backes, D. Casanova, and O. M. Bruno, "Plant leaf identification based on volumetric fractal dimension," *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, vol. 23, no. 6, pp. 1145–1160, 2009.